

完备蕴含链及策略存在性的判定

田双亮¹, 陈 萍²

(1. 西北民族学院 数学系, 甘肃 兰州 730030; 2. 西北民族学院 经济管理系, 甘肃 兰州 730030)

摘要: 提出了事元集的完备蕴含链的概念, 在此基础上, 讨论了事元集中, 目的事元实现策略的存在性.

关键词: 信息库; 事元; 策略; 完备蕴含链

中图分类号: TB144; F263

文献标识码: A

文章编号: 1007-7162(2001)01-0055-04

1 问题的事元模型及策略的概念

1.1 信息库的描述与问题的事元模型

信息库是具有一定蕴含结构的信息集合, 它的描述包括两个部分: 信息集和信息之间的蕴含关系^[1].

将信息看成是一个物元或事元^[2], 用 D_i 表示, 信息集为 $\{D_i\}_{i \in M}$, $M = \{1, 2, \dots, n\}$. 信息之间的邻接蕴含关系用邻接矩阵^[3] A 表示. 可把信息库表示为以信息为顶点, 邻接蕴含关系为边的蕴含图^[4], 记作 $G(\{D_i\}_{i \in M}, A)$.

以已知的信息库 $G(\{D_i\}_{i \in M}, A)$ 为条件, 要实现的事元 I_0 为目的, 构成问题 P , 记为

$$P = I_0 * G(\{D_i\}_{i \in M}, A). \quad (1)$$

1.2 非蕴含事元集及策略

定义 1 已知事元集 C , 若对任意事元 $I \in C$, 事元集 $C - \{I\}$ 的所有子集均不蕴含 I , 则称事元集 C 是非蕴含事元集, 简称非蕴含集.

定义 2 已知事元集 C 与事元 I_0 , $I_0 \notin C$, 且 C 蕴含 I_0 或记为 $C \Rightarrow I_0$. 若 C 中任意去掉一个事后不再蕴含 I_0 , 则称事元集 C 是事元 I_0 的一个实现策略, 简称 I_0 的策略.

由定义 1, 2 可得

性质 1 若事元集 C 是事元 I_0 的策略, 则 C 是非蕴含集.

证明 假设 C 不是非蕴含集, 由非蕴含集定义知: 对某个 $I^* \in C$, 必存在 $C - \{I^*\}$ 的子集 C^* , 使得 $C^* \Rightarrow I^*$ 成立.

因 $C^* \subset C - \{I^*\}$, 且 $C^* \Rightarrow I^*$, 则有 $C - \{I^*\} \Rightarrow C$. 由 C 是事元 I_0 的策略得 $C \Rightarrow I_0$, 故有 $C - \{I^*\} \Rightarrow I_0$, 即 C 中去掉一个事元 I^* 后仍蕴含 I_0 , 与 C 是 I_0 的策略矛盾. 因此, 事元集 C 为非蕴含集. [证毕]

性质 2 已知事元集 S 和目的事元 I_0 , 且 $I_0 \notin S$, 若 $S \Rightarrow I_0$, 则 S 中必存在 I_0 的策略.

证明 略.

在问题(1)中, 为讨论目的事元 I_0 实现策略的存在性, 引入完备蕴含链的概念.

2 完备蕴含链与策略存在性的判定

2.1 完备蕴含链及其构造方法

定义 3 已知事元集 D 和序列 $\{C_l\}$, $l = 0, 1, \dots, m$, 其中 C_l 均为非蕴含事元集, 且有 $C_0 \Rightarrow C_1 \Rightarrow \dots \Rightarrow C_m$, 若满足 (1) $C_i \cap C_j = \emptyset$, $i \neq j$, $i, j = 0, 1, \dots, m$. (2) $\bigcup_{l=0}^m C_l = D$, 则称 $C_0 \Rightarrow C_1 \Rightarrow \dots \Rightarrow C_m$ 为事元集 D 的一条完备蕴含链.

为构造事元集 D 的完备蕴含链, 定义事元集基集的概念.

定义 4 已知事元集 S 和 C , $C \subset S$. 若 C 是非蕴含集, 且 $C \Rightarrow S$, 则称事元集 C 是事元集 S 的一个基集.

关于完备蕴含链的构造有如下定理

定理 1 设 C_0 是事元集 D 的基集, 且 $D - C_0 \neq \emptyset$, C_k 是事元集 $D - \bigcup_{j=0}^{k-1} C_j$ 的基集, $k = 1, 2, \dots, m$, 其中 $C_m = D - \bigcup_{j=0}^{m-1} C_j$, 则 $C_0 \Rightarrow C_1 \Rightarrow \dots \Rightarrow C_m$ 是事元集 D 的一条完备蕴含链.

证明 由定义 4 知: C_l 均为非蕴含集, $l = 0, 1, \dots, m$.

因 C_1 是 $D - C_0$ 的基集, 所以 $C_1 \subset D - C_0 \subset D$, 而 C_0 是 D 的基集, 根据定义 4 有 $C_0 \Rightarrow D$, 故有 $C_0 \Rightarrow C_1$.

假设 $C_l \Rightarrow C_{l+1}$. 由于 C_{l+2} 是 $D - \bigcup_{j=0}^{l+1} C_j$ 的基集, 所以 $C_{l+2} \subset D - \bigcup_{j=0}^{l+1} C_j \subset D - \bigcup_{j=0}^l C_j$. 又由 C_{l+1} 是 $D - \bigcup_{j=0}^l C_j$ 的基集, 得 $C_{l+1} \Rightarrow C_{l+2}$. 因此有 $C_l \Rightarrow C_{l+1} \Rightarrow C_{l+2}$. 根据数学归纳法知: $C_0 \Rightarrow C_1 \Rightarrow \dots \Rightarrow C_m$.

由已知, 显然有 $C_i \cap C_j = \emptyset$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \dots, m$, 和 $\bigcup_{l=0}^m C_l = D$.

根据定义 3, 则 $C_0 \Rightarrow C_1 \Rightarrow \dots \Rightarrow C_m$ 是事元集 D 的一条完备蕴含链. [证毕]

2.2 策略存在性的判定

在问题(1)中, 判定 I_0 策略的存在性, 亦即在由信息库 $G(\{D_i\}_{i \in M}, A)$ 得到的事元集 $D = \bigcup_{i=1}^n D_i$ 中, 判定是否存在事元子集蕴含目的事元 I_0 .

为讨论方便, 分两种情形: (1) $I_0 \notin D$. (2) $I_0 \in D$.

由于 I_0 的任意策略 C 均满足 $I_0 \notin C$, 因此可将情形(2)转化为在事元集 $D - \{I_0\}$ 中判定 I_0 策略的存在性, 这与情形(1)相同, 以下主要讨论情形(1).

关于策略存在性的判定有以下定理

定理 2 设 $C_0 \Rightarrow C_1 \Rightarrow \dots \Rightarrow C_m$ 是事元集 D 的一条完备蕴含链, 其中 $m \geq 1$. (1) 若某个 C_{k_0} 中存在 I_0 的策略, $0 \leq k_0 \leq m$, 则事元集 $\bigcup_{j=0}^{k_0} C_j$ 中至少有 $k_0 + 1$ 个 I_0 的不同策略. (2) 若 C_{k_0} 中不存在 I_0 的策略, $1 \leq k_0 \leq m$, 则事元集 $\bigcup_{j=k_0}^m C_j$ 中不存在 I_0 的策略.

证明 (1) 由 C_{k_0} 中存在事元 I_0 的策略得 $C_{k_0} \Rightarrow I_0$. 又根据已知有 $C_0 \Rightarrow C_1 \Rightarrow \dots \Rightarrow C_{k_0}$, 且 $C_i \cap C_j = \emptyset$, $i \neq j$, $i, j = 0, 1, 2, \dots, k_0$, 故有 $C_0 \Rightarrow C_1 \Rightarrow \dots \Rightarrow C_{k_0} \Rightarrow I_0$. 根据性质 2 知, $C_0, C_1, \dots, C_{k_0}$ 中

均含有事元 I_0 的策略, 亦即事元集 $\bigcup_{j=0}^{k_0} C_j$ 中至少有 k_0+1 个 I_0 的不同策略.

(2)(反证法) 假设事元集 $\bigcup_{j=k_0}^m C_j$ 中存在 I_0 的策略, 则有 $\bigcup_{j=k_0}^m C_j \Rightarrow I_0$. 而由 C_{k_0} 是 $D - \bigcup_{j=0}^{k_0-1} C_j$ 的基集有 $C_{k_0} \Rightarrow D - \bigcup_{j=0}^{k_0-1} C_j$, 又因 $D - \bigcup_{j=0}^{k_0-1} C_j = \bigcup_{j=k_0}^m C_j$, 故有 $C_{k_0} \Rightarrow I_0$, 根据性质 2, C_{k_0} 中必存在 I_0 的策略, 这与已知矛盾, 因此假设不成立. [证毕]

推论 若事元集 D 的基集 C_0 中不存在目的事元 I_0 的策略, 则 D 中不存在 I_0 的策略.

定理 3 设 D 为非蕴含集, D_1 和 D_2 为事元集, 记 $D' = D_1 \cup D \cup D_2$. D 、 D_1 和 D_2 满足 $D \cap D_1 = \emptyset$, $D \cap D_2 = \emptyset$, $D_1 \cap D_2 = \emptyset$; $C_0^{(1)} \Rightarrow C_1^{(1)} \Rightarrow \dots \Rightarrow C_{m_1}^{(1)}$ 和 $C_0^{(2)} \Rightarrow C_1^{(2)} \Rightarrow \dots \Rightarrow C_{m_2}^{(2)}$ 分别是事元集 D_1 与 D_2 的完备蕴含链, 且 $C_{m_1}^{(1)} \Rightarrow D \Rightarrow C_0^{(2)}$. (1) 若某个 $C_{t_0}^{(2)}$ 中存在 I_0 的策略, $0 \leq t_0 \leq m_2$, 则事元集 D 中必存在 I_0 的策略, 且 D' 中至少有 $m_1 + t_0 + 3$ 个 I_0 的不同策略. (2) 若任一 $C_{s_0}^{(1)}$ 中不存在 I_0 的策略, $0 \leq s_0 \leq m_1$, 则 D 中不存在 I_0 的策略.

证明 (1) 由已知得: $C_0^{(1)} \Rightarrow C_1^{(1)} \Rightarrow \dots \Rightarrow C_{m_1}^{(1)} \Rightarrow D \Rightarrow C_0^{(2)} \Rightarrow C_1^{(2)} \dots \Rightarrow C_{m_2}^{(2)}$ 是事元集 D' 的一条完备蕴含链, 而 $C_{t_0}^{(2)}$ 中存在 I_0 的策略, 根据定理 2(1) 知 $C_0^{(1)}$, $C_1^{(1)}$, $\dots$, $C_{m_1}^{(1)}$, D , $C_0^{(2)}$, $C_1^{(2)}$, $\dots$, $C_{t_0}^{(2)}$ 中均含有 I_0 的策略, 即事元集 D' 中至少有 $m_1 + t_0 + 3$ 个 I_0 的不同策略.

(2) 若任一 $C_{s_0}^{(1)}$ 中不存在 I_0 的策略, 由定理 2(2) 知事元集 $(\bigcup_{j=s_0}^{m_1} C_j^{(1)}) \cup D \cup (\bigcup_{j=0}^{m_2} C_j^{(2)})$ 中不存在 I_0 的策略, 因此, 事元集 D 中不存在 I_0 的策略.

3 举例

设目的事元为 I_0 , 信息库的信息为 $D_i = \{I_i\}$, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$, $D_{10} = \{I_3, I_5, I_8\}$, $D_{11} = \{I_4, I_6\}$, 信息间的邻接蕴含关系为: $D_1 \Rightarrow D_2$, $D_4 \Rightarrow D_2$, $D_4 \Rightarrow D_3$, $D_3 \Rightarrow D_7$, $D_5 \Rightarrow D_6$, $D_8 \Rightarrow D_4$, $D_9 \Rightarrow D_3$, $D_9 \Rightarrow D_6$, $D_{10} \Rightarrow D_1$, $D_{11} \Rightarrow D_7$, (1) 若事元集 $\{I_5, I_8, I_9\}$ 中不含有 I_0 的策略, $D = \bigcup_{i=1}^{11} D_i$ 中是否存在 I_0 的策略? (2) 若 $I_7 \Rightarrow I_0$, 则 D 中至少有多少个 I_0 的策略? (3) 若事元集 $\{I_1, I_4, I_5, I_6\}$ 中不含 I_0 的策略, 事元集 $\{I_2, I_7\}$ 中是否存在 I_0 的策略?

根据参考文献[4]中蕴含图邻接矩阵及蕴含矩阵的确定方法, 该信息库的邻接蕴含矩阵 A 和蕴含矩阵 W 分别为:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$W=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

由 W 可确定事元集 $D = \{I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6, I_7, I_8, I_9\}$ 的一条完备蕴含链: $\{I_5, I_8, I_9\} \Rightarrow \{I_1, I_4, I_6\} \Rightarrow \{I_2, I_3\} \Rightarrow \{I_7\}$.

(1) 因 $\{I_5, I_8, I_9\}$ 中不含有 I_0 的策略, 根据定理 2 的推论, 事元集 D 中不存在 I_0 的策略.

(2) 因 $I_7 \Rightarrow I_0$, 根据定理 2(1) 知事元集 D 中至少有 4 个 I_0 的不同策略.

(3) 因事元集 $\{I_1, I_4, I_5, I_6\}$ 中没有 I_0 的策略, 所以其子集 $\{I_1, I_4, I_6\}$ 中也不含有 I_0 的策略, 根据定理 2(2) 知事元集 $\{I_1, I_2, I_3, I_4, I_6, I_7\}$ 中不存在 I_0 的策略, 其子集 $\{I_2, I_7\}$ 中也不存在 I_0 的策略.

参考文献:

[1] 蔡文, 杨春燕, 林伟初. 可拓工程方法[M]. 北京: 科学出版社, 1997. 26, 65.
[2] 杨春燕. 事元及其应用[J]. 系统工程理论与实践, 1998, 18(2): 80-86.
[3] 杨振生. 组合数学及其算法[M]. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 1997. 201.
[4] 田双亮. 蕴含图的基集及其性质[J]. 广东工业大学学报, 2000, 17(1): 96-100.

Complete Implication Link and the Judgement
of the Existence about Tactics

TIAN Shuang-liang¹, CHEN Pin²

(1. Department of mathematics, Northwest Minorities University, Lanzhou 730030, China;
2. College of Economics Management, Northwest Minorities University, Lanzhou 730030, China)

Abstract: The concept of complete implication link is proposed. Based on this concept, the existence of the affair element set and the tactics realizing affair element of aims is discussed.

Key words: information base; affair element; tactics; complete implication link